Mathématiques et sciences humaines
Mathematics and social sciences

197 | Printemps 2012
Catégories, classification, complexité, consensus…
Autour des travaux de Jean-Pierre Barthélemy

Des catégories à la catégorisation

From categories to categorization

Pascal Boldini

OpenEdition Journals

Édition électronique
URL : http://journals.openedition.org/msh/12160
DOI : 10.4000/msh.12160
ISSN : 1950-6821

Éditeur
Centre d'analyse et de mathématique sociales de l'EHESS

Édition imprimée
Date de publication : 22 avril 2012
Pagination : 19-32
ISSN : 0987-6936

Référence électronique
Pascal Boldini, « Des catégories à la catégorisation », *Mathématiques et sciences humaines* [En ligne], 197 | Printemps 2012, mis en ligne le 02 mai 2012, consulté le 20 avril 2019. URL : http://journals.openedition.org/msh/12160 ; DOI : 10.4000/msh.12160

Math. & Sci. hum. / Mathematics and Social Sciences (50e année, n° 197, *2012*(1), p. 19–32)

DES CATÉGORIES À LA CATÉGORISATION

Pascal BOLDINI[1]

RÉSUMÉ – *Cet hommage est l'occasion d'un retour mélancolique sur les thématiques qui nous ont occupés Jean-Pierre Barthélemy et moi au cours des années 1990 à Télécom Bretagne. Qu'elles se soient focalisées sur les rapports entre catégories naturelle et logique n'a rien de surprenant quand on sait que Jean-Pierre a été formé au sein de l'école française de théorie des catégories, et que ses premiers articles étaient consacrés à la logique catégorique naissante. C'est le cheminement de cette conception tout à fait spécifique du rapport entre logique et structures qui est évoqué ici à travers l'analyse d'une recherche dont il a été le bienveillant directeur.*

MOTS CLÉS – Catégories, Catégorisation, Esquisses, Logique interne, Piaget, Topoï.

SUMMARY – From categories to categorization
This tribute is the opportunity for a melancholic return to topics with which we were occupied, Jean-Pierre Barthélemy and myself, during the 90's at Télécom Bretagne. It is hardly surprising that we focused on the relationship between natural categories and logic, given that Jean-Pierre was trained within the French school of category theory, and that his first papers belonged to the growing field of categorical logic. Analysing the research pursued under his benevolent direction, I will trace the influence of this specific approach to logic and structures.

KEYWORDS – Categories, Categorization, Internal logic, Piaget, Sketches, Toposes.

1. ESQUISSES

Jean-Pierre Barthélemy a été formé à Paris 7 auprès de Charles Ehresmann ; sa thèse de troisième cycle avait pour sujet les « Esquisses pointées »[Barthélemy, 1971]. On ne peut évidemment pas mentionner ce titre sans avoir une pensée pour le peintre qui, bien plus tard, dans la veine de l'abstraction lyrique, allait nous étonner par ses tableaux si puissants.

Pour en revenir à cette période de formation, il faut tout d'abord évoquer la figure de Charles Ehresmann. Spécialiste de topologie et de géométrie différentielle, membre du groupe Bourbaki, Charles Ehresmann utilise depuis longtemps les notions catégoriques issues de la topologie algébrique, mais son approche n'en demeure pas moins très spécifique.

[1]Institut des Sciences Humaines Appliquées (ISHA), Université Paris-Sorbonne, Maison de la Recherche, 28 rue Serpente 75006 Paris, et Centre d'Analyse et de Mathématique Sociales (CAMS-EHESS), 190 avenue de France 75244 Paris cedex 13, pascal.boldini@paris-sorbonne.fr

> *En 1966 (...) Ehresmann introduit les esquisses, très voisines des catégories marquées de Chevalley, puisque ce sont des « graphes multiplicatifs » marqués de cônes. Il n'explicite pas du tout le lien avec les sites et catégories de faisceaux, car il faut dire que son point de vue est tout autre que celui de Grothendieck. En effet, Ehresmann (...) préfère toujours les calculs et descriptions « dessinées » par de petits diagrammes bien visuels. (...) Ainsi, pour lui une catégorie est d'abord un graphe orienté, plus une loi de composition des paires de flèches consécutives : vers 1965 cela fait une différence entre lui et les autres catégoriciens ...*
>
> [Guitart, 1980]

Jean-Pierre Barthélemy a entièrement hérité de cette conception diagrammatique des catégories. C'était d'ailleurs sa manière spontanée de donner au novice l'intuition de ce qu'était une catégorie : quelque chose situé entre l'ordre partiel, catégorie riche en objets et pauvre en flèches, et le monoïde, catégorie pauvre en objets et riche en flèches,

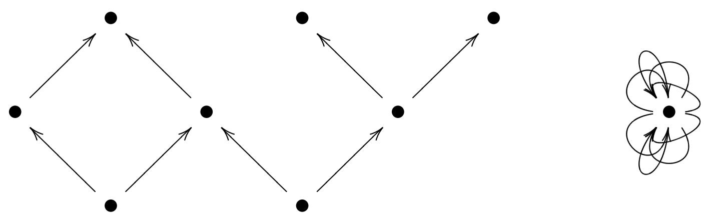

FIGURE 1. Ordre partiel *vs* monoïde

Cependant, on s'en doute, la théorie des esquisses, c'est beaucoup plus que cela. Une esquisse est l'équivalent graphique d'une théorie au sens de la théorie des modèles, puisque les structures algébriques concrètes en sont d'une certaine manière les instanciations. À titre d'exemple, la Figure 2 est l'esquisse d'un monoïde [Coppey, 1992].

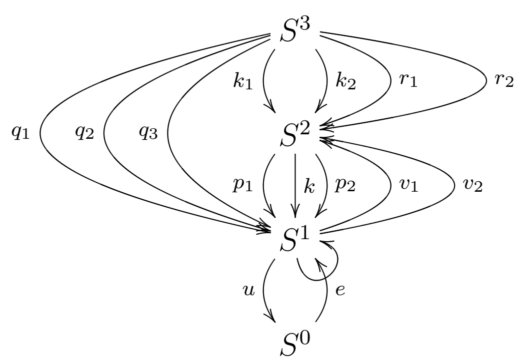

FIGURE 2. Esquisse d'un monoïde

En effet, ce petit graphe résume à sa façon tout ce dont on a besoin pour parler d'un monoïde quelconque M. Il nous faut exprimer trois idées : l'existence d'une loi de composition interne, l'existence d'un élément neutre, et la propriété d'associativité. Ainsi les objets S^0, S^1, S^2, S^3 sont respectivement interprétés par $\emptyset$, M, M^2 et M^3 ; la flèche e est interprétée par l'élément neutre, les flèches p_1, p_2, q_1, q_2, q_3, r_1, r_2 par les diverses projections, les flèches k, k_1, k_2 par les diverses façons de mettre en œuvre la composition interne ; et enfin, les propriétés attendues correspondent à la commutativité de certains sous-diagrammes.

2. LOGIQUE ET CATÉGORIES

On le voit, Jean-Pierre Barthélemy a évolué au sein d'une école où logique et catégories rivalisent dans leur prétention à capturer l'essence des structures mathématiques. Cependant, et c'est tout à fait remarquable – bien qu'énigmatique pour moi aujourd'hui, faute d'avoir eu à l'époque la culture suffisante pour poser les bonnes questions – les deux articles [Barthélemy, 1973, 1974] s'inscrivent dans le champ alors naissant de la logique catégorique anglo-saxonne.

2.1. LA LOGIQUE CATÉGORIQUE

Dans cette approche, il ne s'agit pas tant de concurrencer les formalismes logiques, que de les analyser de manière catégorique, c'est-à-dire de les caractériser ou les classifier en fonction des constructions catégoriques qu'ils instancient. Jean-Pierre s'inscrira explicitement dans la lignée des travaux de Joachim Lambek [1968, 1969, 1972] qui caractérisent les systèmes déductifs en termes catégoriques.

On peut se faire très simplement une idée de cette approche catégorique de la logique, et de sa productivité, en considérant les exemples de la conjonction et de la disjonction propositionnelle.

Du point de vue de la démonstration, si A et B sont deux symboles de propositions, on peut affirmer trois choses à peu près évidentes :

1. la forme « normale » d'une démonstration de la conjonction $A \wedge B$ est un couple (a, b) formé d'une démonstration a de A et d'une démonstration b de B ;
2. d'une démonstration de $A \wedge B$ on doit pouvoir extraire une démonstration de A et une démonstration de B ;
3. si une démonstration de $A \wedge B$ est « normale » sous la forme d'un couple formé d'une démonstration a de A et d'une démonstration b de B, les opérations d'extraction évoquées doivent nous redonner les démonstrations initiales de A et B séparément.

On retrouve ces trois exigences formalisées dans tous les systèmes de preuve sous forme de règles d'introduction, d'élimination, et de réduction[2].

- Introduction

$$\frac{a : A \qquad b : B}{(a, b) : A \wedge B} \wedge\text{-intro}$$

- Elimination

$$\frac{c : A \wedge B}{p(c) : A} \wedge\text{-elim}_g$$

[2]La notation $a : A$ signifie que a est une preuve de A.

$$\frac{c : A \wedge B}{q(c) : B}\ \wedge\text{-elim}_d$$

- Réduction

$$\text{Soit}(a, b) : A \wedge B,\ \text{alors } p((a, b)) = a : A \text{ et } q((a, b)) = b : B$$

Si l'on représente les démonstrations par des flèches et les propositions par les objets d'une catégorie, les exigences formulées ci-dessus ne sont rien d'autre que les propriétés d'universalité d'une limite projective (ramenée dans ce cas au produit de deux objets) qui s'expriment par la commutativité du diagramme ci-dessous.

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rr, "(a,b)"] \arrow[dr, "a"'] \arrow[drrr, "b"] & & A \times B \arrow[dl, "p"'] \arrow[dr, "q"] & \\ & A & & B \end{tikzcd}$$

FIGURE 3. Limite projective

Si l'on inverse le sens des flèches, et c'est là toute la beauté de l'abstraction catégorique, on obtient le diagramme d'une limite inductive qui s'interprète naturellement en termes de théorie de la démonstration.

$$\begin{tikzcd} C & & A + B \arrow[ll, "\text{cases}"'] & \\ & A \arrow[ul, "a"] \arrow[ur, "i"] & & B \arrow[ul, "j"'] \arrow[ulll, "b"] \end{tikzcd}$$

FIGURE 4. Limite inductive

On retrouve dans ce cas les règles usuelles d'introduction, d'élimination, et de réduction pour la disjonction propositionnelle, c'est-à-dire pour le raisonnement par cas :

- Introduction

$$\frac{a : A}{i(a) : A}\ \vee\text{-intro}_g$$

$$\frac{b : B}{j(b) : B}\ \vee\text{-intro}_d$$

- Elimination

$$\frac{c : C \quad \begin{array}{c}[x : A]\\ \vdots \\ d(x) : C\end{array} \quad \begin{array}{c}[x : B]\\ \vdots \\ e(x) : C\end{array}}{\text{cases}(c, (x)d(x), (x)e(x)) : C}\ \vee\text{-elim}$$

- Réduction

$$\text{cases}(i(a), (x)d(x), (x)e(x)) = a : A \qquad \text{cases}(j(b), (x)d(x), (x)e(x)) = b : B$$

Ces deux exemples donnent une idée de l'analogie profonde qui existe entre constructions catégoriques et formes de la déduction logique. Cette analogie sera exploitée des points de vue logique et catégorique. Du point de vue logique, les langages formels de preuve – comme le système F de Girard [1989] – trouveront dans les structures catégoriques les sémantiques dénotationnelles qui leur font souvent défaut dans le cadre ensembliste classique ; du point de vue catégorique, on pourra pour certaines catégories définir un langage qui permet de raisonner sur les objets et morphismes de la catégorie comme s'il s'agissait d'ensembles et de fonctions.

C'est évidemment ce dernier point de vue qui exercera une profonde influence sur la conception de la logique de Jean-Pierre Barthélemy. La théorie des *topoi*[3] [MacLane, 1992], développée à partir des travaux de William Lawvere, a donné corps à l'idée qui veut que l'on puisse définir à partir de la structure, le langage logique qui permet de la décrire. Techniquement cela passe par la définition d'un langage, le *langage interne*, et d'une sémantique, la sémantique de Kripke-Joyal [Lambek, Scott, 1986] qui, dans l'esprit de la sémantique de Kripke pour la logique intuitionniste, permet d'interpréter les formules du langage interne par des propriétés de la catégorie. Par exemple, la catégorie des ensembles (classiquement conçus) est dotée d'une structure de topos booléen qui fait que sa logique intrinsèque est la logique classique. D'un autre côté l'existence de topoï non-booléens, tel que la catégorie des faisceaux sur un espace topologique, permet de donner sens à des notions non classiques d'ensemble (dans ce cas, des ensembles variant continuement au dessus de l'espace topologique).

2.2. LE CONSTRUCTIVISME

Les travaux exposés dans [Barthélemy, 1973, 1974] utilisent donc le raisonnement catégorique pour prouver des propriétés logiques. Le premier résultat est un théorème de complétude pour le calcul propositionnel classique. Il montre que l'on peut définir l'ensemble des tautologies comme les unités d'une catégorie particulière dont l'image par un foncteur est l'objet 1 de la catégorie de Boole ($1 \leftarrow 0$), et que cet ensemble coïncide avec l'ensemble des propositions ou objets démontrables, définis quant à eux comme les unités vers lesquelles pointent une flèche, c'est-à-dire une démonstration, à partir d'un objet terminal.

Le deuxième résultat concerne la notion de *réfutabilité*. Cette notion logique est très importante du point de vue constructif, car elle permet une interprétation constructive de la logique classique. Plus précisément, d'après le théorème de Glivenko, nous savons qu'une proposition A est démontrable classiquement si et seulement sa double négation $\neg\neg A$ est démontrable en logique intuitionniste, c'est-à-dire si et seulement si $\neg A$ peut être réfutée par une démonstration constructive. Dans l'article [Barthélmy, 1974], Jean-Pierre prouve par des techniques catégoriques très

[3]L'exemple paradigmatique de topos est la catégorie des faisceaux au dessus d'un espace topologique.

sophistiquées que le calcul de réfutabilité n'est pas perturbé si l'on remplace une collection de propositions déclarées comme fausses par une seule proposition.

Cet intérêt des catégoriciens pour les notions constructives n'est pas accidentel, et il se décline selon les deux types de rapport entre logique et catégories précédemment évoqués. Dès l'origine, la notion de catégorie permet de relativiser les notions ensemblistes classiques, puisque la catégorie des ensembles n'est après tout qu'une catégorie parmi les autres, et en outre catégoriquement bien déterminée. La théorie des *topoï* déjà évoquée nous permet d'envisager d'autres univers mathématiques qui diffèrent de l'univers familier par les constructions universelles qu'ils autorisent et dont en général la logique est intuitionniste.

Cette dimension du rapport entre logique et catégories qui privilégie les « grosses » catégories ne doit pas faire oublier l'autre approche, celle de la théorie des esquisses, française certes et minoritaire, mais profondément constructiviste, où comme le dit Pierre Ageron, « l'accent est mis sur la progressivité des constructions de structures par agrandissement des esquisses » [Ageron, 2002].

2.3. LA PRIMAUTÉ DES STRUCTURES

Jean-Pierre ne s'est jamais écarté du point de vue catégorique en ce qui concerne la logique : les langages et systèmes logiques ne sont pas des créations pures en quête de sémantiques ensemblistes ou catégoriques, mais au contraire ils doivent émerger des structures mathématiques.

Mais il importe aussi de comprendre que pour Jean-Pierre cette conviction ne venait pas uniquement de sa profonde connaissance des subtilités techniques de la logique catégorique. Elle a trouvé de puissantes motivations dans les activités de mathématicien appliqué qui l'ont occupé après ces années de formation.

D'autres que moi développent dans ce numéro l'importance de ses travaux dans le domaine de la classification. On peut dire, et c'est un euphémisme, qu'il n'avait jamais été convaincu par les approches logiques dans ce domaine, et tout particulièrement lorsqu'il s'agissait des logiques floues. Cette suspicion ne venait pas d'un attachement viscéral à la logique classique, au contraire, le fin connaisseur de la logique des topoï savait trop bien que le caractère, classique ou pas, est fondamentalement déterminé par l'univers mathématique, la catégorie, dans laquelle on travaille. Qu'en général, la logique des topoï soit une logique intuitionniste d'ordre supérieur suffit à se déprendre des illusions du classicisme ; non, ce qu'il n'aimait pas dans la logique floue, c'est le caractère indéterminé de ce formalisme situé entre syntaxe et sémantique, entre logique et théorie des probabilités.

En résonnance avec ces « choses de la logique », et plus près de « la logique des choses », les fructueuses collaborations que Jean-Pierre a menées avec des psychologues comme Danièle Dubois ou Étienne Mullet sur divers modèles de catégorisation cognitive, l'ont définitivement convaincu que l'organisation catégorielle est fondamentale, et que si logique naturelle il y a, elle ne peut que dériver de cette structuration première.

C'est la constitution dans les années 1990 du GDR *Sciences cognitives de Paris* qui fournira le cadre institutionnel dans lequel Jean-Pierre pourra développer ces thématiques et effectuera à travers un certain nombre de nos travaux communs son retour à la théorie des catégories.

3. PROTOTYPES ET CATÉGORIES

Les sciences cognitives se sont institutionnalisées en France à partir des années 1980, c'est-à-dire plus de vingt ans après les États-Unis. La critique du chomskysme, de l'Intelligence artificielle symbolique, bref de tout ce qui est fondé sur la logique ou les systèmes de règles avait entre-temps fait son chemin. L'ambiance théorique était donc plus ouverte aux neuro-sciences, aux modèles connexionnistes, à tout ce que l'on appellera le « sub-symbolique ».

Il est à noter que cette dernière expression n'était pas sans ambiguïté, et servait plus à désigner le rejet du logicisme et l'engouement pour certaines techniques, comme les réseaux de neurones formels, que l'adhésion à un programme scientifique bien délimité. En ce qui concerne la psychologie cognitive, le rejet du logicisme se traduira par une attention particulière portée aux mécanismes préconceptuels, la catégorisation au premier chef.

Dans ce domaine, la théorie du prototype développée par Eleanor Rosch était une des plus influentes [Rosch, 1973, 1978]. L'idée qu'une catégorie soit structurée par les relations de proximité avec un élément central – le prototype – plutôt que par la satisfaction d'un certain nombre de propriétés essentielles, ne pouvait que séduire Jean-Pierre qui à cette époque développait avec Alain Guénoche [Barthélemy, Guénoche, 1991] les outils théoriques et algorithmiques permettant de penser la constitution de classes à partir de divers indices de similarité ou de proximité. Le modèle de typicalité présenté dans [Barthélemy, 1991] découle entièrement de ces travaux.

3.1. UN THÈME PRAGMATIQUE

Cette approche de la classification qui repose sur le jugement des agents sans recourir à un ensemble de traits descriptifs explicites, s'éloigne évidemment d'une approche pour laquelle Jean-Pierre avait beaucoup d'affection : l'Analyse formelle des concepts de Rudolf Wille [1982].

Dans ce cas, on part d'un tableau 0/1 représentant des objets décrits par des traits, et on extrait un treillis de « concepts » définis comme rectangles maximums de 1, à réordonnement près des lignes et des colonnes. Le catégoricien ne pouvait que s'y retrouver puisque les « concepts « ainsi obtenus satisfont à travers leurs intensions ($\mathrm{Int}(A)$ est l'ensemble des traits qui caractérisent le concept) et extensions ($\mathrm{Ext}(A)$ est l'ensemble des objets qui tombent sous le concept) la jolie correspondance de Galois $\mathrm{Ext}(A) \subset \mathrm{Ext}(B) \Leftrightarrow \mathrm{Int}(A) \supset \mathrm{Int}(B)$, qui en plus de formaliser la relation bien connue depuis la *Logique de Port Royal* [Arnauld, Nicole, 1662], offre un exemple particulièrement clair d'adjonction entre foncteurs au sens catégorique du terme.

Il n'en reste pas moins que l'utilisation de traits descriptifs arbitraires ne répond pas aux exigences d'une théorie un tant soit peu réaliste de la catégorisation. Si la critique des systèmes à base de règles était devenue dominante dans les milieux de l'Intelligence artificielle et des Sciences cognitives, ce n'est pas seulement en raison des échecs conjoncturels des premières tentatives de traduction automatique ou à cause du célèbre rapport de Marvin Minsky et Seymour Papert [1971] ; la critique vient de plus loin.

Si l'on doit citer un nom, c'est indiscutablement celui de Ludwig Wittgenstein. Sa critique radicale, désormais classique, de la notion de règle ruine tout espoir de rendre compte de nos pratiques, dans quelque domaine que ce soit, comme résultant de l'application d'un nombre déterminé de règles aussi complexes soient elles. Il faut de fait inverser la perspective : le niveau pratique est définitivement premier dans l'ordre de l'explication. Cela ne veut pas dire qu'il n'y ait pas de pratiques fondées sur des règles, et *a fortiori* sur l'application consciente de règles, cela veut dire que même dans ces cas -là, il y a un niveau pratique inéliminable, qui détermine le contenu normatif des jugements sur la bonne ou mauvaise application des règles.

Ce thème de nature philosophique se rattache au pragmatisme américain, même si Wittgenstein ne fait guère référence à Charles S. Peirce, William James ou John Dewey. Il faudra attendre Robert Brandom et son monumental *Making It Explicit* [Brandom, 1994] pour que la critique wittgensteinienne trouve sa juste place dans cette tradition.

Il va de soi que je ne décrirai pas Jean-Pierre comme un pragmatiste au sens philosophique du terme, je pense bien au contraire que, dans le domaine particulier des mathématiques, sa philosophie était très éloignée de toute forme de conventionnalisme. De fait, comme la plupart des *working mathematicians*, il était réaliste, même si sa formation de catégoricien le faisait pencher vers un réalisme des structures plutôt que des objets. En outre on ne peut nier que Jean-Pierre a contribué, en théorie de la décision, au développement de modèles multi-attributs dont le but est précisément de mettre en évidence des règles utilisées par des experts lors de leurs choix [Barthélemy, Mullet, 1985]. Pour autant on peut dire que le souci pragmatique était chez lui constant, au sens où il n'a jamais confondu le recours nécessaire à des règles explicites pour expliquer une pratique, avec les fondements de cette pratique.

3.2. OBJETS ET ATTRIBUTS : UNE CORRESPONDANCE FONCTORIELLE

L'insatisfaction éprouvée face aux modèles qu'il qualifiait de « dualistes »– parce que chaque opération dans le monde des objets est entièrement déterminée par une opération dans le monde des attributs et *vice versa* – l'a amené, dans le domaine de la catégorisation, à explorer les principes abstraits d'une correspondance entre objets et traits descriptifs qui prenne en compte de l'autonomie relative des deux catégories.

En d'autres termes, il s'agissait de prendre au sérieux le fait que des relations entre objets comme la représentativité ou la typicalité ne se réduisent pas à des relations entre attributs, et que réciproquement des relations logiques entre attributs ne se réduisent pas à des relations entre sous-ensembles d'objets.

Ce furent de longues après-midi de travail à Télécom Bretagne où j'ai pu voir le plaisir avec lequel Jean-Pierre faisait ce que j'ai appelé son retour aux catégories. Car de toute évidence, les bons concepts pour appréhender le genre de correspondance que nous avions en tête sont les concepts familiers des catégoriciens, foncteurs, transformations naturelles ; concepts dont la détermination par Eilenberg et MacLane [1945] est à l'origine de la théorie des catégories.

De cette collaboration sortiront le quatrième chapitre de ma thèse de doctorat [Boldini, 1994], repris dans [Barthélemy, Boldini,1994],ainsi que l'article [Barthélemy, Boldini, 1995].

4. MORPHISMES ET CATÉGORIES

De fait, le retour de Jean-Pierre vers les catégories avait débuté un peu plus tôt, sous la forme de l'intérêt qu'il avait témoigné lorsque j'étais allé vers lui avec un vague sujet de thèse autour de l'application des notions catégoriques dans le domaine de la cognition.

Lorsqu'un peu naïvement je lui avais fait part de mon enthousiasme pour *Morphismes et Catégories* de Jean Piaget [1990], j'étais loin de me douter que j'avais en face de moi un catégoricien averti qui aurait la délicatesse de me laisser faire mes propres armes dans un domaine qu'il connaissait à merveille.

Il faut dire que pour quelqu'un qui veut utiliser la Théorie des catégories dans les sciences cognitives, il ne peut y avoir de meilleur encouragement que l'épistémologie génétique piagétienne. En effet Piaget prend très au sérieux l'approche structurale des mathématiciens de son temps. Pour lui, les notions élémentaires et fondamentales mises à jour par l'algèbre moderne ne sont pas accidentelles : si on les retrouve aux fondements des mathématiques, c'est parce qu'elles thématisent des opérations qui interviennent très tôt dans le développement cognitif. Dès 1937 dans *La construction du réel chez l'enfant* [Piaget, 1937], il utilise la notion de groupe pour analyser les conduites spatiales. On ne sera donc pas surpris de le voir s'intéresser aux concepts encore plus abstraits dégagés par les catégoriciens. Il reformulera en termes de morphismes et de correspondances (introduisant les niveaux *intra*, *inter*, et *trans* morphiques) les opérations, pour lui fondamentales, d'assimilation et d'accommodation aux schèmes du sujet.

4.1. UN MODÈLE ...

L'analyse très fine des divers types d'invariants et de correspondances faite par Gil Henriquès et Edgar Ascher [Henriquès, 1990], permet assez aisément de saisir les implicites catégoriques, au sens mathématique du terme, de la nouvelle approche de Jean Piaget.

C'est donc la lecture formelle de leur travail qui est à l'origine du modèle présenté dans [Boldini, 1994]. Les notions fondamentales de limite projective et inductive, de foncteur et de transformation naturelle permettent de formaliser très simplement les notions de schème, d'invariant et de correspondance. Pour donner ici un idée du genre de travail de modélisation dont il s'agit, de son intérêt ainsi que de ses limites, je rappelle les sept propositions constitutives du modèle :

1. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et $\mathcal{I}$ une catégorie indice, un schème est un foncteur $F : \mathcal{I} \to \mathcal{C}$ tel que s'il existe une flèche $F(f) : F(A) \to F(B)$, il existe une flèche $F(g) : F(B) \to F(A)$.

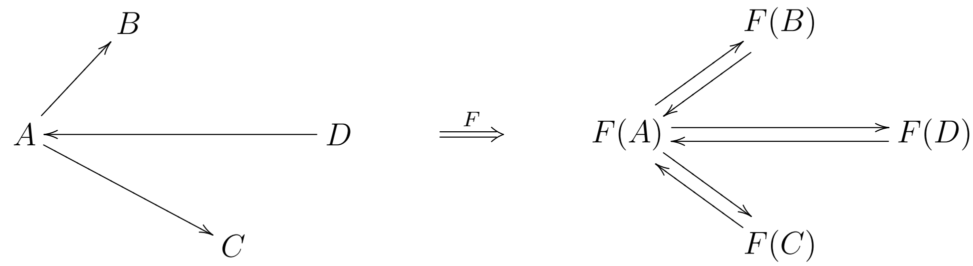

FIGURE 5. Schèmes

2. Si le schème F possède une limite projective ω, cette limite est appelée l'invariant de remplacement ou la forme de F.

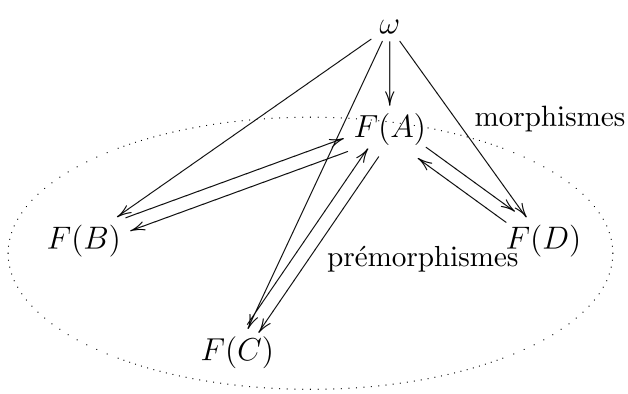

FIGURE 6. Invariant de remplacement

3. Les morphismes relatifs à un schème F sont les flèches $\omega \to F(A)$ où ω est l'invariant de remplacement (la forme) de F.

4. La catégorie des morphismes relatifs à l'objet A est la catégorie $\mathcal{M}_A$ dont les objets sont les flèches $\omega \to F(A)$ où ω est l'invariant de remplacement (la forme) de F et dont les flèches sont les paires $(\omega \to F(A), \delta \to G(A))$ telles que le carré ci dessous commute.

$$\begin{tikzcd} \omega \arrow[r] \arrow[d] & \delta \arrow[d] \\ F(A) \arrow[r] & G(A) \end{tikzcd}$$

5. Une correspondance intermorphique entre les schèmes F et G est une transformation naturelle entre les foncteurs F et G.

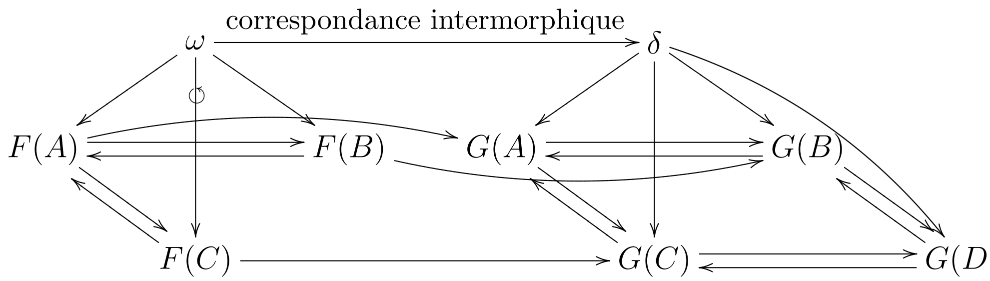

FIGURE 7. Correspondance intermorphique entre schèmes

6. Soient les schèmes $F_1, F_2, \ldots, F_n$, leur schème coordonné est la limite inductive du diagramme dont les objets sont $F_1, F_2, \ldots, F_n$ et les flèches les correspondances intermorphiques entre ces schèmes.

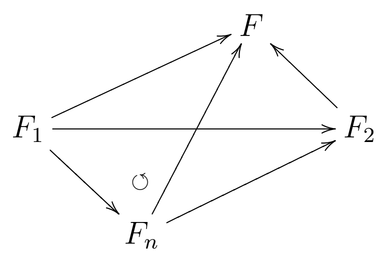

FIGURE 8. Schème coordonné

7. On dit que l'objet indicé par A possède un invariant de transformation lorsque la catégorie $\mathcal{M}_A$ possède des limites inductives.

Le bénéfice de ce genre de travail est avant tout un gain dans l'intelligibilité des approches structurales. Si l'on admet avec Wittgenstein que l'activité mathématique est une activité de détermination de concepts, on peut considérer que la théorie des catégories a déterminé de manière extrêmement précise les concepts nécessaires au développement d'une vision structurale des mathématiques. Il n'y a donc rien de surprenant à ce que l'on retrouve les mêmes concepts, plus ou moins bien explicités, à l'œuvre dans toute théorie structurale, quel qu'en soit le domaine.

4.2. ... ET SES LIMITES

Les limites, quant à elles, sautent aux yeux, que l'on considère le modèle ci-dessus, ou d'autres comme celui proposé par Andrée Ehresmann et Jean-Pierre Vanbremeersch [1987] dans le domaine de la biologie. Pour le dire vite, les dynamiques et les processus concrets échappent à ce type de formalisation. À ce niveau d'abstraction, les morphismes mis en évidence dans les modèles n'ont pas de véritable contenu : ce sont les traces des transformations. C'est d'ailleurs ce sur quoi Piaget attire notre attention en notant que les morphismes sont « transformables en leur forme, non transformants quant à leurs contenus » [Piaget, 1990].

L'universalité des constructions catégoriques exerce certes des contraintes formelles fructueuses sur toute description structurale d'un système, mais on peut regretter à juste titre que ce soit à un niveau trop macro pour saisir la dynamique fine des transformations. C'est pourquoi, que ce soit en théorie des systèmes, en théorie du calcul ou en biologie, la pratique modélisatrice a privilégié des formalismes *ad hoc*, moins bien fondés mathématiquement, mais plus souples et plus intuitifs, comme les réseaux de Pétri ou les systèmes de transition.

5. LE PRAGMATISME ENCORE

Pour en revenir à nos travaux sur la catégorisation, c'est donc fort logiquement que Jean-Pierre m'a incité à articuler la finesse descriptive des systèmes à base d'attributs et les contraintes structurales catégoriques.

Ma première tentative visait à dynamiser l'Analyse formelle des concepts déjà évoquée, en essayant de formaliser catégoriquement, c'est-à-dire en termes de foncteurs et de limites, les évolutions des contextes – les tableaux 0/1 – et leurs corrélats en termes de treillis de concepts. Ce fut un échec. Faute de trouver la bonne notion de correspondance entre contextes, c'est-à-dire celle qui « passe bien » au niveau des treillis de concepts, il était difficile d'aller très loin dans cette direction.

Un autre angle d'attaque a consisté à se donner d'emblée les bonnes structures, faisceaux d'attributs dans [Boldini, 1993], ou fibrations de Grothendieck dans le cinquième chapitre de ma thèse [Boldini, 1995]. Ce fut techniquement très instructif, mais reconnaissons-le un peu décevant étant donné nos objectifs.

Car l'ambition était beaucoup plus vaste, démesurée assurément ; nous espérions valider l'idée qu'il était possible de dégager la logique intrinsèque d'un processus de formation de catégories. La structure de topos avec son langage interne était, de ce point de vue, l'exemple paradigmatique, et c'est elle qui était visée par tous nos efforts, parce qu'elle permet de comprendre le passage d'un niveau structurel à un niveau symbolique.

Il ne faut bien évidemment pas surinterpréter les difficultés rencontrées pour mener à bien un tel projet – on peut tout aussi bien les attribuer à la nature du problème ou à mes incapacités et au manque de persévérance – il me semble toutefois qu'elles pointent elles aussi vers un thème pragmatique.

Selon la très belle formule de Robert Brandom, « Logic is the linguistic organ of semantic self-consciousness and self-control » [Brandom, 1994, p. 384]. Cela signifie que la logique a une fonction expressive : elle permet d'exprimer, d'expliciter, des *pratiques inférentielles* déjà à l'œuvre. C'est très exactement le rapport que l'on retrouve entre une catégorie et son langage interne. Le cas de l'implication est de ce point de vue exemplaire. Pour que le langage interne puisse exprimer une implication $A \to B$, il faut qu'un objet fonctionnel de ce type existe dans la catégorie, c'est-à-dire qu'il faut faire en sorte que les fonctions entre objets de la catégorie forment un objet de même nature que les autres objets, ce que réalise très bien la catégorie des ensembles, et plus généralement toute catégorie cartésienne fermée. En d'autres termes, il faut que l'implication soit déjà là, réalisée au plan pratique comme mécanisme fonctionnel, pour pouvoir être exprimée au niveau linguistique.

C'est, on le voit, une exigence très forte, et il y a peu de structures mathématiques qui la réalisent.

Les logiciens sont en général rompus, pour le pire ou le meilleur, à l'exercice inverse : inventer ou découvrir les structures qui réalisent les opérations logiques de leur langage favori. On assiste au pire quand les structures en question ne sont que le reflet *ad hoc* ou la paraphrase du langage donné ; au meilleur, quand c'est l'occasion d'une véritable inventivité mathématique, comme a pu le faire Dana Scott [1982] en inventant les domaines qui portent son nom pour interpréter le lambda-calcul.

Voulant faire le chemin dans l'autre sens, il n'y avait que deux voies possibles : mettre au départ ce que l'on recherche en postulant que les structures qui règlent les relations entre objets et attributs soient dotées des bonnes propriétés d'internalisation, ou bien partir des structures naturelles que l'on rencontre en classification, et être assez inventif pour les voir sous un autre jour, c'est-à-dire les ré-interpréter de manière à atteindre nos objectifs. On le comprend aisément, seule la seconde voie était vraiment attirante, elle est toujours en attente d'une pleine réalisation.

BIBLIOGRAPHIE

AGERON P. (2002), « Structuralisme et constructivisme. Sur la marginalisation dans la France mathématique du vingtième siècle », *Philosophical Insights into Logic and Mathematics*, International symposium 30 sept. - 4 oct. 2002, Nancy.

ARNAULD A. NICOLE P. (1993), *La logique, ou l'art de penser*, éd. critique par P. Clair et F. Girbal, Paris, Vrin, Bibliothèque des Textes Philosophiques.

BARTHÉLEMY J.-P. (1971), *Esquisses pointées*, Thèse de troisième cycle, Université Paris 7.

BARTHÉLEMY J.-P. (1973), « Théorème de complétude dans les catégories de Boole », *Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques* 14(2), résumés du colloque d'Amiens, p. 4-5.

BARTHÉLEMY J.-P. (1974), « Sur la réfutabilité », *Cahiers de Topologie et Géométrie Différentielle Catégoriques* 15(1), p. 21-46.

BARTHÉLEMY J.-P. (1991), « Similitudes, arbres, et typicalité », D. Dubois (éd.), *Sémantique et cognition*, éditions du CNRS.

BARTHÉLEMY J.-P., BOLDINI P. (1994), « Typicalité, représentativité et dualité pour la représentation des connaissances : une approche ordinale », *Rapport de recherche Télécom Bretagne*, RR-94004.

BARTHÉLEMY J.-P., BOLDINI P. (1995), "Representativity as Emergence", *WOCFAI, Proceedings of the Second World Conference on the Fundamentals of Artificial Intelligence*, p. 3-14.

BARTHÉLEMY J.-P., GUÉNOCHE A. (1988), *Les arbres et les représentations de proximité*, Paris, Masson.

BARTHÉLEMY J.-P., GUÉNOCHE A. (1991), *Trees and Proximity Representations*, NewYork, Wiley.

BARTHÉLEMY J.-P., MULLET É (1985), "Choice basis: a model for multiattribute preferences", *VII^e^ congrès européen de Recherche Opérationnelle*, Bologne.

BOLDINI P. (1993), « Stucturation cognitive et logique intrinsèque », *Mathématiques et Sciences humaines* 121, p. 49-70.

BOLDINI P. (1994), « Morphismes et Catégories : une lecture formelle de Piaget », *Intellectica* 19, p. 187-216.

BOLDINI P. (1995), « Contributions de la théorie des catégories à la représentation des connaissances », *Thèse de doctorat*, Université Rennes I.

BRANDOM R. (1994), *Making It Explicit*, Harvard, Harvard University Press.

COPPEY L. (1992), « Esquisses et types », *Diagrammes* 27, p. 1-33.

EILENBERG S., MACLANE S. (1945), "General Theory of natural equivalences", *Trans. Amer. Math. Soc.* 58, p. 231-94.

EHRESMANN A.-C., VANBREMEESRCH J.-P. (1987), "Hierarchical evolutive systems: a mathematical model for complex systems", *Bulletin of Mathematical Biology* 49(1), p.13-50.

FEFERMAN S. (1977), "Categorical foundations and foundations of category theory", R. Butts and J. Hintikka (eds), *Logic, Foundations of Mathematics, and Computability Theory*, Dordrecht, D. Reidel, p. 149-169.

GIRARD J.-Y., TAYLOR P., LAFONT Y. (1989), *Proofs and Types*, Cambridge, Cambridge University Press.

GUITARD R. (1980), « Sur les contributions de Charles Ehresmann à la Théorie des Catégories », *Gazette des Mathématiciens*, Société Mathématique de France, n° 13, p. 37-43.

HENRIQUÈS G. (1990), « Morphismes et transformations dans la construction d'invariants », Piaget J. (éd.), *Morphismes et Catégories*, Neuchâtel, Delachaux et Niestlé, p. 183-208.

LAMBEK J. (1968), "Deductive systems and categories I. Syntactic calculus and residuated categories.", *Theory of Computing Systems* 2(4), p. 287-318.

LAMBEK J. (1969), "Deductive systems and categories II. Standard constructions and closed categories.", *Lecture Notes in Mathematics* 87, p. 76-122.

LAMBEK J. (1972), "Deductive systems and categories III. Cartesian closed categories, intuitionist propositional calculus, and combinatory logic.", *Lecture Notes in Mathematics* 274, p. 57-82.

LAMBEK J. SCOTT P.-J. (1986), *Introduction to higher order categorical logic*, Cambridge, Cambridge University Press.

MACLANE S., MOERDIJK I. (1992), *Sheaves in Geometry and Logic: a first introduction to Topos Theory*, Springer.

MINSKY M., PAPERT S. (1971), *Progress Report on Artificial Intelligence*, Artificial Intelligence Memo AIM-252.

PIAGET J. (1937), *La construction du réel chez l'enfant*, Paris, Delachaux et Niestlé.

PIAGET J. (1990), *Morphismes et Catégories*, Neuchâtel, Delachaux et Niestlé.

ROSCH E. (1973), "Natural categories", *Cognitive Psychology* 4, p. 328-350.

ROSCH E. (1978), "Principles of categorization", E. Rosch and B. B. Lloyd (eds.), *Cognition and categorization*, Hillsdale (NJ), Lawrence Erlbaum, p. 27-48.

SCOTT D.-S. (1982), "Domains for denotational semantics", M. Nielsen and E.M. Schmidt (eds), *Proc. 9^{th} Internat. Coll. on Automata, Languages and Programming, Lectures Notes in Computer Science* 140, Berlin, Springer, p. 557-613.

WILLE R. (1982), "Restructuring lattice theory: an approach based on hierarchies of concepts", I. Rival. (ed.), *Ordered Sets*, Dordrecht, Reidel, p. 445-470.